gr Małgorzata Kowalczyk
nauczyciel matematyki

Rozwiązania do zadań z zestawu przygotowującego do egzaminu maturalnego z matematyki

Zadanie 1

a) $x \in <-4,5>$

b) $y \in <-1,4>$

c) $f(x)<0$ dla $x \in (2,3\tfrac{1}{2})$; $f(x)>0$ dla $x \in <-4,2) \cup (3\tfrac{1}{2}, 5>$

d) f rosnąca w przedziale: (3,5>; f malejąca w przedziałach: <-4,-2), (1,3)

e) $x=2$; $x=3\tfrac{1}{2}$

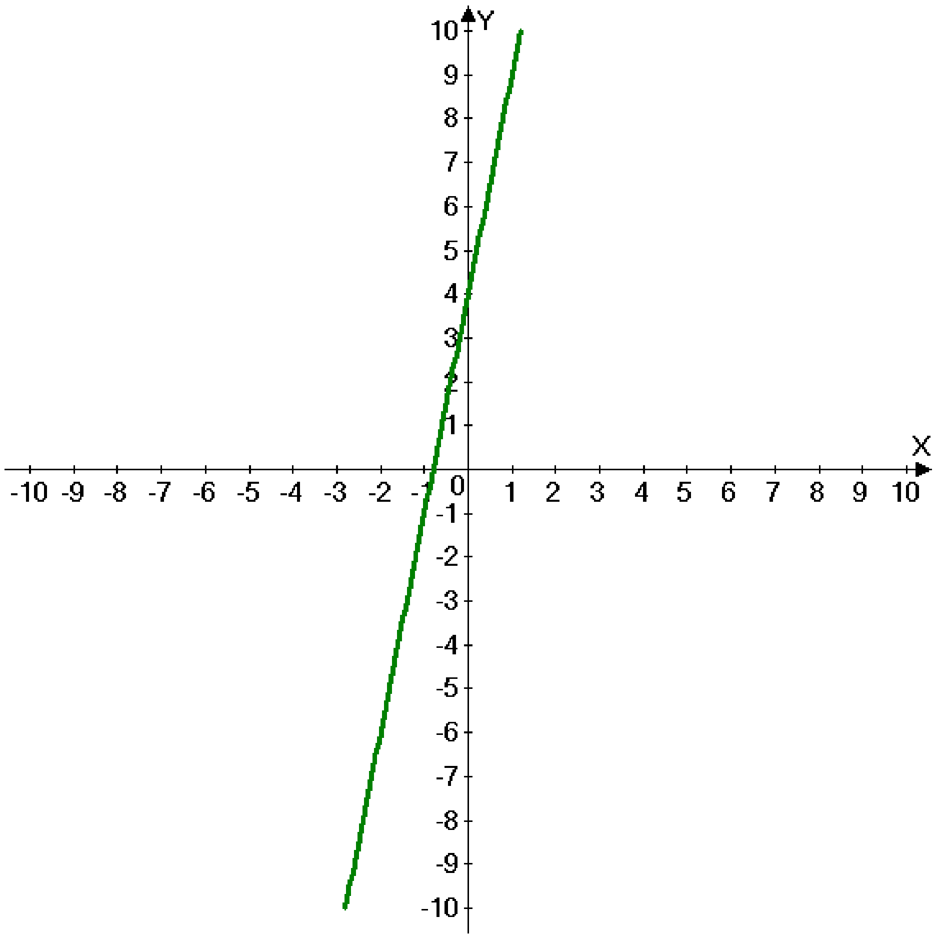
f) $f(-2)=1$; $f(0)=1$; $f(x)=1$ dla $x \in <-2,1>$; $f(x)=3$ dla $x=-4 \vee x=4\tfrac{1}{2}$

Zadanie 2

$y=5x+4$

a) $5x+4=0$
$5x=-4$
$x=-4/5$

b) $y=ax+b$
(0, b) (1, a+b)
(0, 4) (1, 9)



c) A=(-2,-6); B=(1/5,5); C=(9,-1)

y=5x+4

spr. pkt A: -6=5*(-2)+4
-6=-10+4
-6=-6 pkt A należy do wykresy funkcji

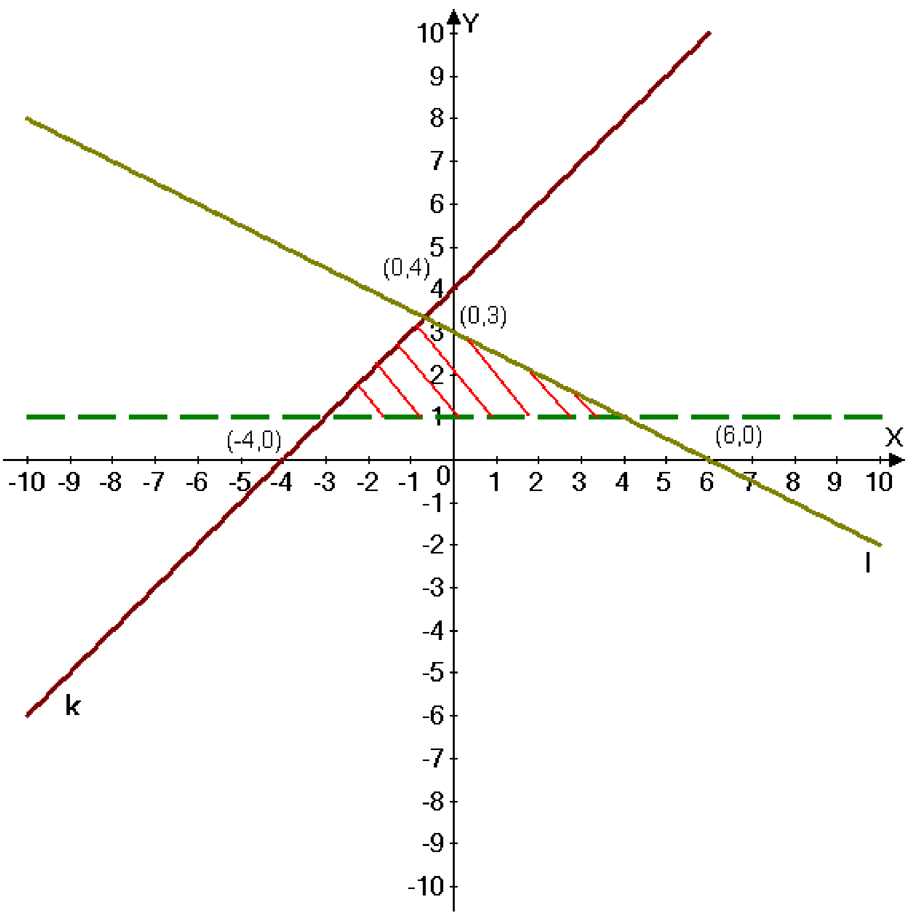
spr. pkt B: 5=5*1/5+4
5=1+4
5=5 pkt B należy do wykresy funkcji

spr. pkt C: 1=5*9+4
1=45+4
1≠49 pkt C nie należy do wykresu funkcji

d) y≥0
5x+4≥0
5x≥-4
x≥-4/5 x∈<-4/5, +∞)

e) 5x+4<6
5x<6-4
5x<2
x<2/5 x∈(-∞, 2/5)

Zadanie 3



pr. k: $x_0 = -4$ b=4
$x_0=-b/a$
$-4=-4/a$
a=1
y=x+4

pr. l: $x_0=6$ b=3
$x_0=-b/a$
$6=-3/a$
a=- ½
y=- ½x + 3

Układ będzie wyglądał następująco:

$$\begin{cases} y\geq 1 \\ y\leq x+4 \\ y\leq -\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$$

Zadanie 4

f(x)= 3 – 1/x, $x\in R_+$

f rośnie $\forall_{x1,x2\in R+}$ x1<x2 => f(x1)<f(x2)

założenie: $x1,x2\in R+ \wedge x1<x2 \equiv x1 - x2 < 0$

$$f(x1)-f(x2)=3-\frac{1}{x1}-(3-\frac{1}{x2})=3-\frac{1}{x1}-3+\frac{1}{x2}=-\frac{1}{x1}+\frac{1}{x2}=-\frac{x2}{x1\bullet x2}+\frac{x1}{x1\bullet x2}=$$

$$=\frac{x1}{x1\bullet x2}-\frac{x2}{x1\bullet x2}=$$

$$=\frac{x1-x2}{x1\bullet x2}<0$$ x1-x2 z założenia ujemne, x1*x2 z założenia dodatnie, więc iloraz będzie ujemny

f(x1)-f(x2)<0 czyli f(x1)<f(x2)+

czyli f jest rosnąca.

Zadanie 5

$$\begin{cases} x-y=4m+1 \ /*(-1) \\ 2x-y=2-m \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=-4+1 \\ 2x-y=-2+1 \end{cases}$$

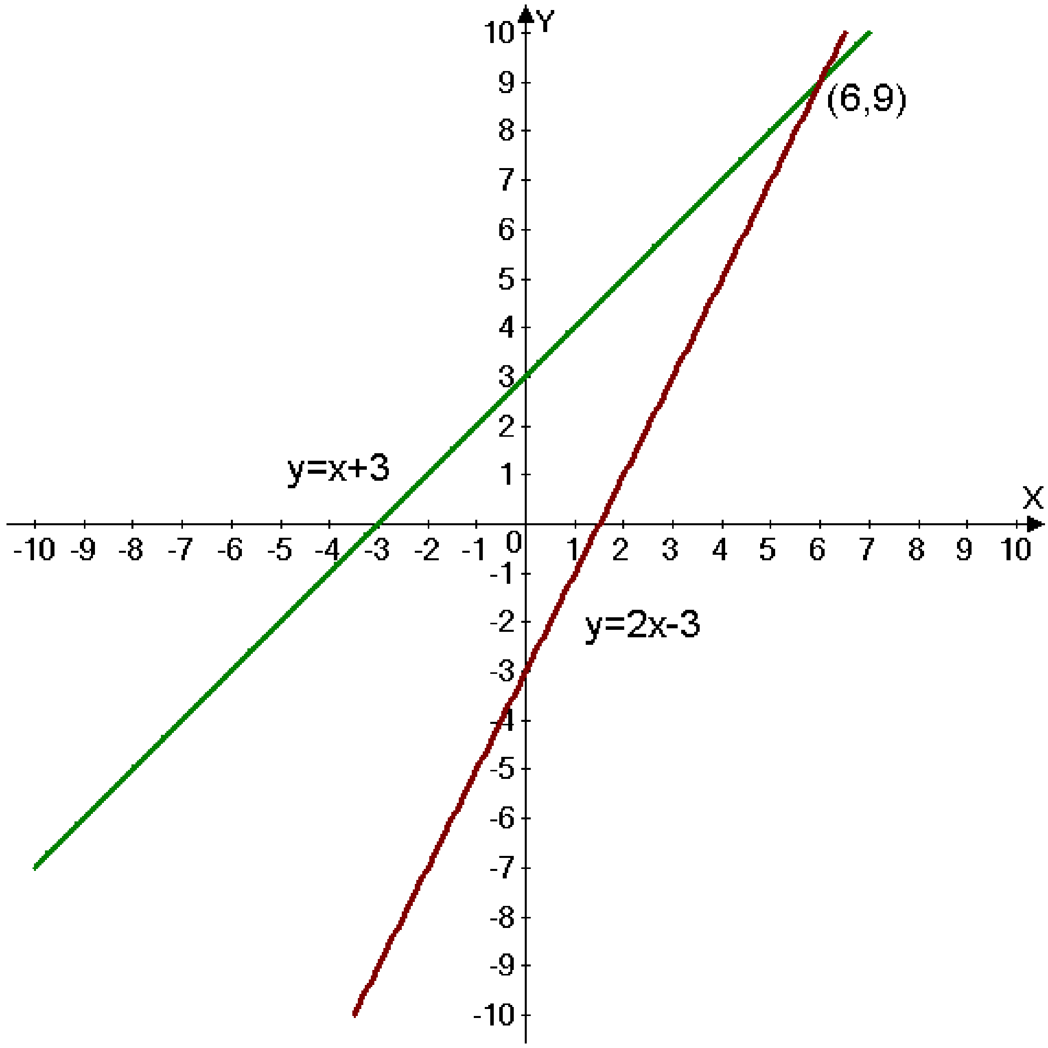
$$\begin{cases} -x+\cancel{y}=-4-1 \\ 2x-\cancel{y}=2-m \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=-3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5m+1 \\ x-y=4m+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x+3 \\ y=2x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5m+1 \\ -5m+1-y=4m+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5m+1 \\ -y=9m \end{cases}$$

$y=x+3$
$-9m=-5m+1+3$
$-4m=4$
$m=-1$



Zadanie 6

$$6x - 8y + 10 = 0$$
$$(2m+1)x - y + 3 = 0$$
$$k: 6x - 8y + 10 = 0$$
$$-8y = -6x - 10$$
$$y = \frac{6}{8}x + \frac{10}{8}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$
$$a_1 = \frac{3}{4}$$
$$l: (2m+1)x - y + 3 = 0$$
$$-y = -(2m+1)x - 3$$
$$y = (2m+1)x + 3$$
$$a_2 = (2m+1)$$
$$k \parallel l \Leftrightarrow a_1 = a_2$$
$$\frac{3}{4} = 2m + 1$$
$$2m + 1 = \frac{3}{4} \quad / \times 4$$
$$8m + 4 = 3$$
$$8m = -1$$
$$m = -\frac{1}{8}$$

Zadanie 7

A=(-4,1), B=(0,-2), C=(-2,2), D=(3,1), E=(5,2), F=(1,3)

Sprawdzam cechę bbb:

▲ABC:

$$|AB| = \sqrt{(0+4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|CA| = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

▲DEF:

$$|DE| = \sqrt{(5-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|EF| = \sqrt{(1-5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$|FD| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

▲ABC i ▲DEF nie są przystające.

Zadanie 8

A=(-4,7), B=(-1,5), C=(5,1)

Wyznaczam prostą AB:

A=(-4,7), B=(-1,5)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 7 = \frac{5-7}{-1+4}(x+4)$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + 7$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$$

Sprawdzam, czy punkt C należy do tej prostej:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{13}{3}$$

$$1 = -\frac{10}{3} + \frac{13}{3}$$

$$1 = \frac{3}{3}$$

$$1 = 1$$

Punkt C należy do prostej AB

Punkty A, B, C są współliniowe.

Zadanie 9

$y = x^2 + bx + c$

$a = 1$

$x_1 + x_2 = 8$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$-\frac{b}{a} = 8$

$-\frac{b}{1} = 8$

$b = -8$

$f(0) = 15$

$x^2 - 8x + c = y$

$0^2 - 8 * 0 + c = 15$

$c = 15$

warunki :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ f(0) = 15 \end{cases}$$

Odp. $y = x^2 - 8x + 15$

Zadanie 10

$4x^2 - 8x + 2 = 0$

a)

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$a = 4, b = -8, c = 2$

$x_1 + x_2 = -\frac{-8}{4}$

$Odp: x_1 + x_2 = 2$

b)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -\frac{-8}{2} = 4$$

Zadanie 11

$x^2 + y^2 = 4$

$O_1(S_1, r_1) x^2 + y^2 = 4$

$S_1 = (0,0)$

$r_1 = 2$

i

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$

$O_2(S_2, r_2)(x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + 16 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 = 9$

$S_2(3,4)$

$r_2 = 3$

$|S_1S_2| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$r_1 + r_2 = 2 + 3$

$|S_1S_2| = r_1 + r_2$

Odp. Okręgi styczne zewnętrznie

Zadanie 12

$A = \{x \in R : x^2 - 2x - 3 \le 0\}$

$x_1 = -1, x_2 = 3$

$A = \langle -1, 3 \rangle$

$B = \{x \in R : 4 - x^2 > 0\}$

$x_1 = -2, x_2 = 2$

$B = (-2, 2)$

Odp: $A \cap B = \langle -1, 2)$

Zadanie 13

Tworzę:

$a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}(n+1)$

$a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$

Obliczam:

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}n = -\frac{1}{2}$

$a_{n+1} - a_n = r$

$r = -\frac{1}{2}$

Odp: Różnica jest stała, czyli jest to ciąg arytmetyczny.

Zadanie 14

a_1, a_1q, a_1q^2

$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7$

$a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 = 8$

$a_1(1+q+q^2) = 7$

$a_1^3q^3 = 8$

$(a_1q)^3 = 8$

$a_1q = 2$

$a_1 = \frac{2}{q}$

$\frac{2}{q}(1+q+q^2) = 7$

$2 + 2q + 2q^2 = 7q$

$2q^2 - 5q + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9, \sqrt{\Delta} = 3$

$q_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$q_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$\begin{cases} a_1q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a_1q = 2 \\ q = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

$a_n = a_1q^{n-1}$

$a_n = 4 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \vee a_n = 2^{n-1}$

Odp. $a_n = 4 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ lub $a_n = 2^{n-1}$.

Zadanie 15

a) dziewcząt – 150, chłopców – 61
b) wszystkich uczniów jest 211

$$\frac{150}{211}\cdot 100\% = 0{,}71\cdot 100\% = 71\%$$

procent dziewczyn w szkole – 71%

c)

$$Ia: \frac{8}{28} = \frac{2}{7} = \frac{780}{2730}$$

$$Ib: \frac{6}{28} = \frac{3}{14} = \frac{585}{2730}$$

$$IIa: \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{546}{2730}$$

$$IIb: \frac{8}{26} = \frac{4}{13} = \frac{840}{2730}$$

$$IIIa: \frac{10}{26} = \frac{5}{13} = \frac{1050}{2730}$$

$$IIIb: \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = \frac{975}{2730}$$

$$IVa: \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = \frac{910}{2730}$$

$$IVb: \frac{6}{26} = \frac{3}{13} = \frac{630}{2730}$$

Odp: W klasie IIIa chłopcy stanowią największą grupę

Zadanie 16

x – o tyle zwiększyć promień kuli R_1

$$R_1 + x = R_2$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

$$3V_1 = V_2$$

$$3\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \quad /\cdot\frac{3}{4}$$

$3\pi R_1^3 = \pi R_2^3 \ / \div \pi$

$3R_1^3 = R_2^3$

$R_2 = R_1 + x$

$3R_1^3 = (R_1 + x)^3$

$(\frac{R_1 + x}{R_1})^3 = 3$

$\frac{R_1 + x}{R_1} = \sqrt[3]{3}$

$R_1 + x = R_1\sqrt[3]{3}$

$x = R_1\sqrt[3]{3} - R_1$

$x = R_1(\sqrt[3]{3} - 1)$

Odp: Promień należy zwiększyć o $x = R_1(\sqrt[3]{3} - 1)$.

Zadanie 17

zał. a,b>0

$a \cdot b = P$

$a \cdot b = 2116$

$a = \frac{2116}{b}$

$ob = 2a + 2b = 2(a + b)$

$o(b) = 2(\frac{2116}{b} + b)$

$o(b) = \frac{4232}{b} + 2b$

$o(b) = \frac{4232 + 2b^2}{b}$

obliczam pochodną:

$o'(b) = \frac{4b \cdot b - (4232 + 2b^2)}{b^2}$

$o'(b) = \frac{2b^2 - 4232}{b^2}$

$o'(b) = 0 \Leftrightarrow 2b^2 - 4232 = 0 / \div 2$

$$b^2 - 2116 = 0$$

$$(b-46)(b+46) = 0$$

$$b = 46 \vee b = -46$$

b=-46 nie spełnia warunków zadania

Obliczam drugą pochodną:

$$o''(b) = \frac{4b \cdot b^2 - (2b^2 - 4232) \cdot 2b}{b^4}$$

$$o''(b) = \frac{4b^3 - 4b^3 + 8464b}{b^4}$$

$$o''(b) = \frac{8464b}{b^4}$$

$$o''(b) = \frac{8464}{b^3}$$

$$o''(46) = \frac{8464}{97336} > 0$$

to o(46) posiada minimum

$$b = 46$$

$$a = \frac{2116}{46}$$

$$a = 46$$

Odp: a=46, b=46.

Zadanie 18

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$x^3 - x - 2x - 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x+1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

Zadanie 19

$f(x)=x^3-mx^2+5x-4, x\in R$

$f'(x)=3x^2-2mx+5$

$f'(2)=3\cdot 2^2-2m\cdot 2+5$

$f'(2)=3\cdot 4-4m+5$

$f'(2)=-4m+17$

$f'(2)=0$

$-4m+17=0$

$m=\frac{17}{4}$

$f(x)=x^3-\frac{17}{4}x^2+5x-4$

$f'(x)=3x^2-\frac{17}{2}x+5$

$f'(x)=0$

$3x^2-\frac{17}{2}x+5=0$

$6x^2-17x+10=0$

$\Delta=289-240=49, \sqrt{\Delta}=7$

$x_1=\frac{17-7}{12}=\frac{5}{6}$

$x_2=\frac{17+7}{12}=2$

x		**5/6**		**2**	
f'(x)	+	**0**	-	**0**	+
f(x)	↗	**max**	↘	**min -3**	↗

$f(2)=2^3-\frac{17}{4}\cdot 4+10-4$

$f(2)=-3$

Odp: Dla m=17/4 funkcja f posiada dla x=2 minimum.

Zadanie 20

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1, A(-1,1)$

$f'(x) = 6x + 2$

$f'(-1) = -6 + 2$

$f'(-1) = -4$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 1 = -4(x + 1)$

$y = -4x - 4 + 1$

$l : y = -4x - 3, a_1 = -4$

$4x + 2y - 6 = 0$

$2y = -4x + 6$

$k : y = -2x + 3, a_2 = -2$

$l \perp k \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$

$-4 \cdot (-2) = 1$

$8 \neq 1$

Odp: Styczna do wykresu funkcji f nie jest prostopadła do prostej.

Zadanie 21

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 1$

$f'(x_0) = -3$

$f'(x) = 6x^2 + 8x - 1$

$6x^2 + 8x - 1 = -3$

$6x^2 + 8x + 2 = 0$

$\Delta = 4, \sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \dfrac{-4-2}{6} = -1$

$x_2 = \dfrac{-4+2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 1 + 1$

$f(-1) = -2 + 4 + 2$

$f(-1) = 4$

$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27} + \frac{12}{27} + \frac{36}{27}$

$f(-\frac{1}{3}) = \frac{46}{27}$

Odp: Punkty styczności to: $A(-1,4), B(-\frac{1}{3}, \frac{46}{27})$